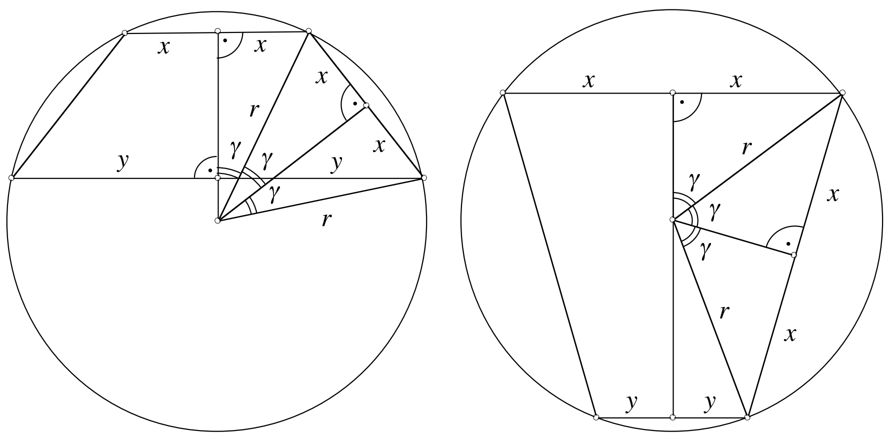
Anregung aus „Histoire de trapèze isocèle“, Bulletin Nr. 124

Peter Gallin

Auf Seiten 7-9 des Bulletins Nr. 124 vom Januar 2014 untersucht Jean Piquerez eine Aufgabe, welche offenbar an einer Aufnahmeprüfung ans Polytechnikum gestellt worden war. Wenn ich seine wunderbar zurechtgemachte Lösung betrachte, muss ich gestehen, dass ich unter Prüfungsbedingungen eine solche Aufgabe kaum hätte lösen können. So habe mich gefragt, ob die etwas rätselhaft formulierte Aufgabe nicht auch so abgewandelt werden könnte, dass eine weniger rechenintensive Aufgabe, eine Maturaufgabe, daraus würde. Die ursprüngliche Aufgabe lautete: „Un trapèze isocèle, de périmètre 16, est inscrit dans un cercle de rayon 4. Calculer les côtes et le rayon du cercle inscrit“. Dass die Existenz eines Inkreises so beiläufig erwähnt wird, ist etwas hinterhältig. Lassen wir doch diese Existenz weg und fassen das Trapez als doppelt-gleichschenklig auf: Von einem Trapez sollen drei Seiten, also zwei Schenkel und eine Grundseite, gleich lang sein. Dann existiert ein Umkreis, dessen Radius $r = 4$ gegeben sein soll. Ferner sei der Umfang $u = 16$ des Trapezes gegeben.



Bezeichnet man mit x die halbe Schenkellänge, mit y die halbe Länge jener Grundseite, deren Länge verschieden von den Schenkellängen ist, und mit γ den Winkel im rechtwinkligen Dreieck mit Kathete x und Hyptenuse r, so findet man rasch drei Gleichungen für diese drei Unbekannten:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & \frac{u}{2} - 3x \\ \sin(\gamma) & = & \frac{x}{r} \\ \sin(3\gamma) & = & \frac{y}{r} \end{array} \right\}$$

Mit der Dreifachwinkelformel $\sin(3\gamma) = 3\sin(\gamma) - 4\sin(\gamma)^3$ ergibt sich

$$3 \cdot \frac{x}{r} - 4 \cdot \frac{x^3}{r^3} = \frac{y}{r} \quad \text{oder mit Einbezug der 1. Gleichung :} \quad 12xr^2 - 8x^3 = ur^2$$

Für $u = 16$ und $r = 4$ entsteht die kubische Gleichung

$$x^3 - 24x + 32 = 0 \ ,$$

von der eine (geometisch unmögliche) Lösung $x_1 = 4$ erraten werden kann. Dividiert man durch den Linearfaktor $(x-4)$, entsteht eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_{2,3} = 2(\pm\sqrt{3}-1)$. Nur $x_2 = 2(\sqrt{3}-1)$ ist positiv und geometrisch sinnvoll. So ist also eine Maturaufgabe mit relativ wenig Rechenaufwand, aber mit Anwendung von Geometrie, Goniometrie und Algebra entstanden.