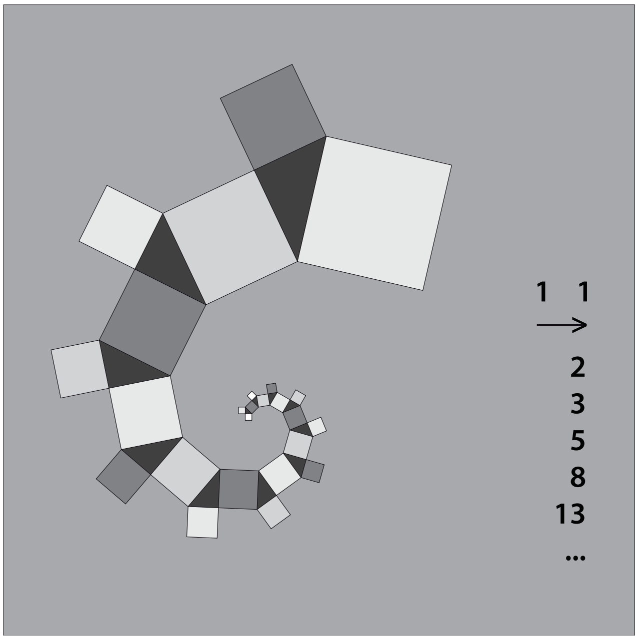
Die Suche nach dem Zentrum der FIBONACCI-Spirale von Eugen Jost

Peter Gallin

Der Künstler und Primarlehrer Eugen Jost aus Thun hat ein Bild mit dem Titel „Fibonacci trifft Pythagoras“ geschaffen, auf dem eine Spirale aus rechtwinkligen Dreiecken und den Quadraten über ihren Seiten zu sehen ist. Durch die spezielle Färbung der Quadrate wird verdeutlicht, dass jeweils zwei Quadrate gleich gross sind. Dieses Bild diente auch als Leitmotiv für das EU-Projekt FIBONACCI, welches von 2010 bis 2013 im Bereich Mathematik von der Universität Bayreuth unter Prof. Peter Baptist wissenschaftlich begleitet worden ist.



Fibonacci Meets Pythagoras,
Computergraphik © Eugen Jost, Thun

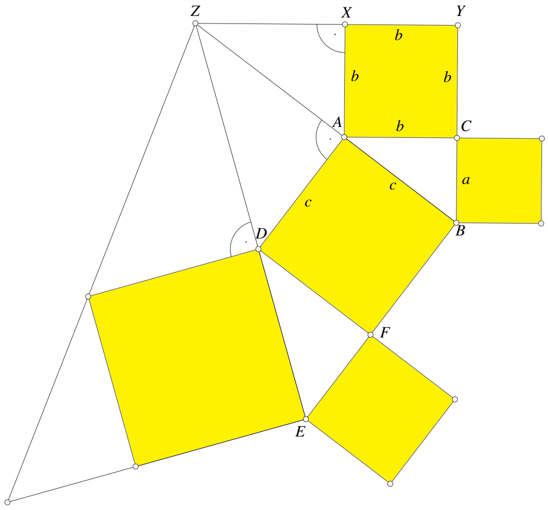
Die FIBONACCI-Spirale von Eugen Jost ist folgendermassen definiert: Man beginne mit einem ganz kleinen rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck mit Kathetenlängen 1 und zeichne die Quadrate über den Seiten. Das Hypotenusenquadrat dieses ersten Dreiecks hat die Fläche 2 und sei das grössere Kathetenquadrat eines zweiten rechtwinkligen Dreiecks, während dessen kleineres Kathetenquadrat gleich dem Einheitsquadrat sei. Danach wird das neue Hypotenusenquadrat mit Fläche 3 des zweiten Dreiecks zum grösseren Kathetenquadrat eines dritten rechtwinkligen Dreiecks, wobei sein kleineres Kathetenquadrat gleich dem grösseren Kathetenquadrat des zweiten Dreiecks sei. Wenn man so weiter fährt, erhält man die FIBONACCI-Spirale. Die Flächeninhalte der Quadrate sind die FIBONACCI-Zahlen, da man ja wegen des Satzes von Pythagoras jeweils zwei Kathetenquadratflächen zusammenzählt, um die Hypotenusenquadratfläche zu erhalten:

Nummer n	1	2	3	4	5	6	...
FIBONACCI-Zahl f_n	1	1	2	3	5	8	...

Nun stellt sich die Frage, ob diese Spirale ein Zentrum besitzt, so wie man es von der logarithmischen Spirale her kennt. Als elementare Vorübung betrachten wir zuerst eine andere Spirale, die wir „Pythagoras-Spirale“ nennen, welche sehr einfache Eigenschaften hat und offensichtlich ein Zentrum besitzt.

Das Zentrum der Pythagoras-Spirale

Die Pythagoras-Spirale wird folgendermassen definiert: Man beginne mit einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck ABC. In der nachfolgenden Figur haben wir das Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 gewählt. Man zeichne die beiden Kathetenquadrate und das Hypotenusenquadrat. Sodann wird das Hypotenusenquadrat als Kathetenquadrat eines neuen rechtwinkligen Dreiecks DEF aufgefasst, welches gleichsinnig ähnlich zum ersten Dreieck sein soll. Auch dieses Dreieck erhält sein zweites Katheten- und das Hypotenusenquadrat, welches als Kathetenquadrat eines dritten, gleichsinnig ähnlichen Dreiecks aufgefasst wird. Auf diese Weise kann man nun beliebig weiterfahren und immer neue rechtwinklige Dreiecke bilden, welche zusammen mit den Quadraten eine Spirale, die Pythagoras-Spirale, bilden. Nun wollen wir zeigen, dass sich die Geraden, welche wir durch die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke legen, alle in einem einzigen Punkt Z, dem Zentrum der Spirale, schneiden.



Zunächst schneiden wir die Hypotenusengerade AB mit der Geraden durch die Ecken X und Y des grösseren Kathetenquadrats und erhalten so den Punkt Z. Sind a, b und c die Längen der Dreiecksseiten BC, CA und AB, so ergeben sich wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und ZAX die Längen $|ZX| = b \cdot \frac{b}{a}$ und $|ZA| = b \cdot \frac{c}{a}$. Damit gilt:

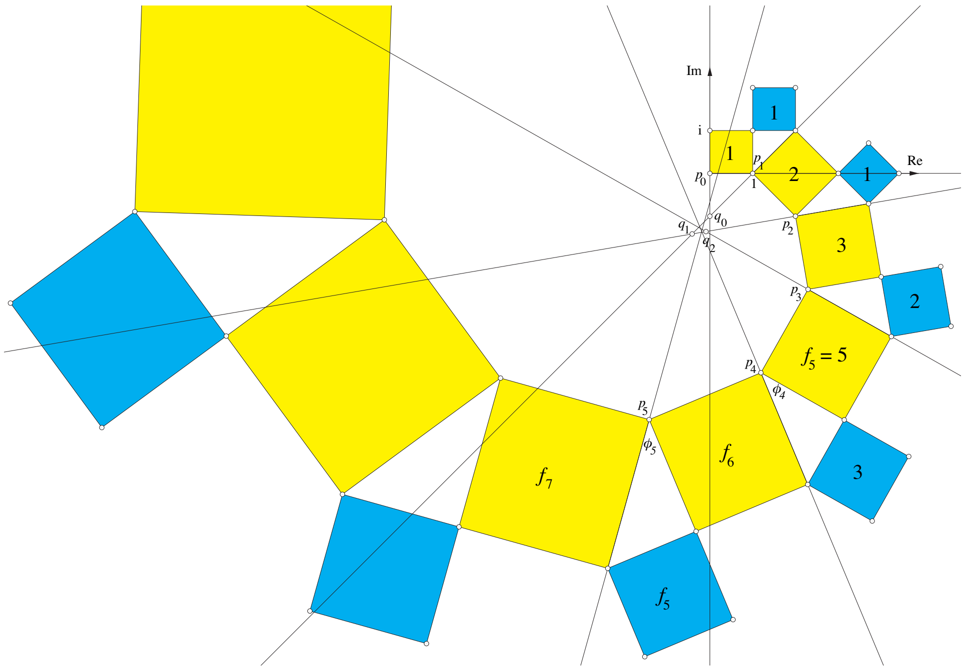
$$\tan(\angle AZX) = \frac{b}{|ZX|} = \frac{b}{b \cdot \frac{b}{a}} = \frac{a}{b} = \frac{c}{b \cdot \frac{c}{a}} = \frac{c}{|ZA|} = \tan(\angle DZA)$$

Da nach Voraussetzung auch $\tan(\angle EDF) = \frac{a}{b}$ gilt, liegen die Punkte Z, D und E in einer Geraden, was zu beweisen war. Der Punkt Z ist also immer Schnittpunkt aller Hypotenusenverlängerungen der rechtwinkligen Dreiecke. Z sichtet alle ihm nahe liegenden Quadratseiten XA, AD usw. unter dem gleichen Winkel $\arctan(\frac{a}{b})$. Damit liegen die Ecken X, A, D usw. dieser Quadrate auf einer logarithmischen Spirale mit Zentrum Z. Mit einer Streckung mit Zentrum Z und Faktor $\frac{a+b}{b}$ geht diese Spirale in eine andere logarithmische Spirale durch die Punkte Y, B, E usw. über, welche aber zur ersten Spirale kongruent ist, denn eine logarithmische Spirale geht durch zentrische Streckung immer in eine kongruente über.

Zurück zur FIBONACCI-Spirale

Nun wollen wir die gemachten Erfahrungen übertragen auf die ursprüngliche Fragestellung: Hat allenfalls auch die FIBONACCI-Spirale ein Zentrum?

Als Instrument der Suche nach dem Zentrum der FIBONACCI-Spirale werden wir mit komplexen Zahlen arbeiten. Dazu betten wir das Bild von Eugen Jost in die Gauss'sche Zahlenebene ein. Das eine der beiden Einheitsquadrate, mit denen Eugen Jost gestartet ist, definiert mit einer Ecke und zwei anliegenden Seiten ein rechtwinkliges Koordinatensystem wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Dadurch sei die komplexe Zahlenebene mit der reellen und imaginären Achse festgelegt.



Die angeschriebenen Flächeninhalte der Quadrate sind gemäss unserer Konstruktionsvorschrift die FIBONACCI-Zahlen. Somit sind die Seitenlängen der Quadrate die Wurzeln von FIBONACCI-Zahlen. Da der Quotient von aufeinanderfolgenden FIBONACCI-Zahlen gegen den goldenen Schnitt $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ konvergiert, werden alle rechtwinkligen Dreiecke immer ähnlicher, denn der kleinere spitze Winkel des n-ten Dreiecks beträgt

$$\phi_n = \arccos \sqrt{\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}}$$

und konvergiert für $n \to \infty$ gegen $\arccos \sqrt{\tau}$. Man überprüft, dass $\phi_1 = \pi/4$, was mit den 45° des ersten Dreiecks übereinstimmt, und stellt fest, dass $\phi_0 = 0$.

Wären die rechtwinkligen Dreiecke tatsächlich ähnlich, so würden sich die Hypotenusenverlängerungen immer in einem festen Punkt, dem Zentrum der Spirale, schneiden. Diese Tatsache haben wir in der obigen Vorübung untersucht. Also verfolgen wir jetzt auch die Schnittpunkte der Hypotenusenverlängerungen.

Wir berechnen also fortlaufend die Schnittpunkte der verlängerten Hypotenusen in der vorliegenden Figur. Sie werden in einem engen Bereich liegen und zu einem Grenzpunkt konvergieren, den wir das Zentrum der

FIBONACCI-Spirale nennen und den wir jetzt berechnen wollen. Zuerst berechnen wir die inneren Eckpunkte p_n der jeweils grösseren Kathetenquadrate. Es geht also um den Streckenzug $p_0p_1p_2\ldots$, den wir erhalten, wenn wir sukzessive die Summe von komplexen Zahlen bilden, welche den einzelnen orientierten Strecken entsprechen. Die Länge der Strecken ist bekannt, nämlich die Wurzeln aus FIBONACCI-Zahlen. Die Argumente der komplexen Zahlen erhält man durch Aufaddieren der spitzen Winkel unserer rechtwinkligen Dreiecke, denn jede Strecke des Streckenzugs wird im Vergleich zur vorangehenden mit einem solchen Winkel weitergedreht. Unter der Verwendung der Polardarstellung komplexer Zahlen mit der Eulerschen Formel $r\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ ergibt sich:

$$p_n = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{f_{j+1}}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\phi_{k-1}}$$

Dabei kontrolliert man, dass $p_1 = 1$ und $p_2 = 2 - \mathrm{i}$, was mit der Figur übereinstimmt.

Vom Punkt p_n aus — eine Ecke des n-ten Dreiecks mit den Katheten $\sqrt{f_n}$ und $\sqrt{f_{n+1}}$ und der Hypotenuse $\sqrt{f_{n+2}}$ — muss man nun senkrecht zur Richtung p_np_{n+1} eine gewisse Länge x Richtung Zentrum bis zum Punkt q_n, dem Schnittpunkt der Hypotenusenverlängerungen des n-ten und des $(n+1)$-ten Dreiecks, gehen. Die Strecke x, die Quadratseite p_np_{n+1} und die Hypotenusenverlängerung des $(n+1)$-ten Dreiecks bilden ein rechtwinkliges Dreieck, das ähnlich ist zum $(n+1)$-ten Dreieck. Damit erhält man die Ähnlichkeitsbeziehung

$$\sqrt{f_{n+1}} : \sqrt{f_{n+2}} = \sqrt{f_{n+2}} : x\ .$$

Also ist

$$x = \frac{f_{n+2}}{\sqrt{f_{n+1}}}\ .$$

Um den Endpunkt q_n der Strecke x zu berechnen, müssen wir also zu p_n noch das $-\mathrm{i}$-fache der mit $\frac{f_{n+2}}{\sqrt{f_{n+1}}}$ gestreckten komplexen Einheit in Richtung p_np_{n+1} addieren. Damit erhalten wir:

$$q_n = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{f_{j+1}}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\phi_{k-1}} - \mathrm{i}\frac{f_{n+2}}{\sqrt{f_{n+1}}}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n+1}\phi_{k-1}}$$

Mit Mathematica habe ich folgende numerische Resultate erhalten:

n	0	1	2	3	4
q_n	$-\mathrm{i}$	$-0.41421 - 1.4142\ \mathrm{i}$	$-0.09077 - 1.3587\ \mathrm{i}$	$-0.21971 - 1.2858\ \mathrm{i}$	$-0.19119 - 1.3538\ \mathrm{i}$

n	5	6	10	20
q_n	$-0.18165 - 1.3196\ \mathrm{i}$	$-0.1956 - 1.3299\ \mathrm{i}$	$-0.1895 - 1.3286\ \mathrm{i}$	$-0.1897611 - 1.328812\ \mathrm{i}$

n	30	40
q_n	$-0.18976130834 - 1.3288116315\ \mathrm{i}$	$-0.18976130846 - 1.3288116315\ \mathrm{i}$

Die Punkte $q_0 = -\mathrm{i}$ und $q_1 = (\sqrt{2}-1) - \mathrm{i}\sqrt{2}$ sind die einzigen, die direkt geometrisch kontrollierbar sind. „Offensichtlich" (einen Beweis müsste man hier anschliessen) konvergieren die Punkte q_n gegen einen Grenzpunkt q. Damit ist immerhin gezeigt, dass ein Zentrum der FIBONACCI-Spirale nur im Limes existiert. Ob eine geschlossene Darstellung dieses Punktes gefunden werden kann, bleibt offen.