Verteilen von Objekten auf Schubladen

Pietro Gilardi, MNG Rämibühl

Zusammenfassung

n Objekte werden auf m Schubladen zufällig verteilt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in jeder Schublade mindestens ein Objekt liegt?
Das Problem wird zuerst rekursiv gelöst. Aus der rekursiven Formel wird dann eine explizite Formel hergeleitet.

1 Einführung

In der Schule wird folgendes Problem behandelt:
n Objekte werden auf m Schubladen zufällig verteilt. Jemand öffnet eine Schublade. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Schublade nicht leer ist?
Sei X die Anzahl Objekte in der Schublade. Es gilt:

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{m-1}{m}\right)^n$$

Da die Schublade zufällig gewählt ist, könnte man denken, dass diese Zahl auch die Wahrscheinlichkeit ist, dass keine Schublade leer ist. Der Fall $n = m = 3$ wiederlegt dies:
Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Schublade leer ist, ist $3!\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{6}{27}$.
Die obige Formel liefert hingegen die Wahrscheinlichkeit $\frac{19}{27}$.
Die Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass keine Schublade leer ist, ist im allgemeinen Fall komplizierter und wird unten hergeleitet.

2 Rekursive Formel

Man betrachte folgende Bezeichnungen:

- A_n^m : Jede der m Schubladen enthält mindestens eines der n Objekte, $m \geq 2$, $n \geq 1$.
- B_k^m: Die erste der m Schubladen enthält k Objekte.
- $p(m,n) = p(A_n^m)$ (Wahrscheinlichkeit von A_n^m)

Für $m = 2$ gilt:

$$p(2,n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Für $m \geq 3$ kann einer der folgendenden $(n-1)$ Fälle eintreten:
Die erste Schublade enthält k Objekte und die restlichen $(n-k)$ Objekte werden auf die restlichen $(m-1)$ Schubladen verteilt, $1 \leq k \leq n-1$. Es gilt:

$$p(m,n) = \sum_{k=1}^{n-1} p(B_k^m) \cdot p(m-1, n-k)$$

Die Wahrscheinlichkeit von B_k^m ist leicht zu bestimmen. Es gilt:

$$p(B_k^m) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^{k}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-k}$$

Somit sieht die Rekursionsgleichung wie folgt aus:

$$p(m+1,n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m+1}\right)^{k}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n-k} p(m,n-k)$$

3 Explizite Formel

Die rekursive Berechnung von $p(m,n)$ ist selbst für ein CAS-Programm wie MAPLE aufwendig. Um die explizite Formel für $p(m,n)$ zu bestimmen werden zuerst $p(3,n)$, $p(4,n)$ und $p(5,n)$ explizit bestimmt. Es gilt:

$$p(3,n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} p(2,n-k)$$

Für $p(2,n-k)$ wird der hergeleitet Ausdruck eingesetzt:

$$p(3,n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}\left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right)$$

Wenn die Klammern aufgelöst werden, bekommt man:

$$p(3,n)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}-2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$\Updownarrow$$

$$p(3,n)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}-2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

Das Summenzeichen lässt sich eliminieren, indem man folgende Formel benutzt:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}=(x+y)^n-x^n-y^n$$

Es gilt:

$$p(3,n)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$p(3,n)=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+1=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{3}{3}\right)^n$$

Analoge Berechnungen führen zu:

$$p(4,n)=-4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+6\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^n-4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{4}{4}\right)^n$$

$$p(5,n)=5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n-10\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-5\left(\frac{4}{5}\right)^n+\left(\frac{5}{5}\right)^n$$

Es liegt die Vermutung nahe:

$$p(m,n)=(-1)^m\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\left(\frac{k}{m}\right)^n$$

4 Beweis

Die explizite Formel wird mit vollständiger Induktion bewiesen.

- Für $m=2$ ist der Fall klar.

- Induktionsschritt

$$p(m+1,n)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{m+1}\right)^k\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n-k}p(m,n-k)$$

$$\Updownarrow$$

$$p(m+1,n)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{m+1}\right)^k\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n-k}(-1)^m\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\Bigg($$

$$\Updownarrow$$

$$p(m+1,n)=(-1)^m\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{m+1}\right)^k\left(\frac{i}{m+1}\right)^{n-k}$$

$$\Updownarrow$$

$$p(m+1,n)=(-1)^m\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{m+1}\right)^k\left(\frac{i}{m+1}\right)^{n-k}$$

$$\Updownarrow$$

$$p(m+1,n)=(-1)^m\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\Bigg(\left(\frac{1+i}{m+1}\right)^n-\left(\frac{1}{m+1}\right)^n-\Bigg(\frac{i}{m+}$$

Der Koeffizient von $\left(\frac{i}{m+1}\right)^n$ wird mit a_i bezeichnet. Man muss zeigen:

$$a_i=(-1)^{m+1}(-1)^i\binom{m+1}{i}\qquad 1\le i\le m+1$$

Der Term $\left(\frac{1}{m+1}\right)^n$ kommt in jedem Summand mit $i>1$ einmal und im Summand mit $i=1$ zweimal vor. Es gilt also

$$a_1=(-1)^m\left(m-\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\right)$$

Da

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}=1+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}=0$$

ist

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}=-1$$

Also:

$$a_1 = (-1)^m\,(1+m) = (-1)^{m+1}(-m-1) = (-1)^{m+1}(-1)^1(m+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1 = (-1)^{m+1}(-1)^1\binom{m+1}{1}$$

Der Term $\left(\dfrac{i}{m+1}\right)^n$, $1 < i \leq m$ kommt zweimal vor. Es gilt:

$$a_i = (-1)^m\left((-1)^{i-1}\binom{m}{i-1} - (-1)^i\binom{m}{i}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$a_i = (-1)^{m+1}\left((-1)^i\binom{m}{i-1} + (-1)^i\binom{m}{i}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$a_i = (-1)^{m+1}(-1)^i\binom{m+1}{i}$$

Der Term $\left(\dfrac{m+1}{m+1}\right)^n$ kommt genau einmal vor. Es gilt:

$$a_{m+1} = (-1)^m(-1)^m\binom{m}{m}(=1)$$

Somit gilt:

$$p(m+1,n) = (-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}\left(\frac{k}{m+1}\right)^n$$

und die Formel ist bewiesen.