Aha! Mathematatik! – Teil III.

Achtung: Bestimmtes Integral!

Urs Stammbach

Das bestimmtes Integral von a nach b über die Funktion f berechnet man, indem man den Wert der Stammfunktion F von f an der unteren Grenze b vom Wert der Stammfunkion an der oberen Grenze a subtrahiert.

So steht es – gewöhnlich schön eingerahmt – in den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Fritzli, der Gymnasiast, hatte sein Lehrbuch gut studiert und er glaubte auch gerne, was da drin stand. Schliesslich folgte seine Mathematiklehrerin in der Schulstunde fast immer dem Text des Lehrbuches, und sie musste es ja wohl wissen! Fritzli beschloss, zur Übung gleich ein Beispiel zum Thema "Bestimmte Integrale" zu machen, und er gab sich das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\, dx$$

vor. In der Tat standen heute morgen in der Mathematikstunde die Stammfunktionen der Potenzfunktionen mit negativen Exponenten auf dem Programm. Fritzli hatte sich über die seltsame Ausnahme bei der Funktion $1/x$ gewundert. Das hatte er noch nicht ganz verstanden. Aber bei $1/x^2$ gab es ja kein Problem. Er rechnete nach den Vorgaben des Lehrbuchs

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{+1} = -\frac{1}{+1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -1 - 1 = -2\ .$$

Wunderbar, dachte Fritzli. Ob das die andern in der Klasse auch schon beherrschten? Aber plötzlich trübte sich Fritzli's Blick: War das wirklich richtig? Waren die Werte der Funktion $1/x^2$ als Quadrate nicht für alle Werte von x positiv? Musste das nicht dazu führen, dass sich die Fläche unter der Kurve ganz oberhalb der x-Achse befand? Und er hatte doch gelernt, dass das bestimmte Integral den Inhalt der Fläche unter der Kurve beschreibt, wobei die Inhalte der Flächenstücke oberhalb der x-Achse positiv zu zählen sind. Was ging hier vor? Fritzli zweifelte nicht daran, dass im Lehrbuch nur Richtiges stand. Er beschloss, dort noch einmal nachzusehen, und da stand tatsächlich oberhalb der eingerahmten Regel noch etwas, die Voraussetzung nämlich, dass *die zu integrierende Funktion im Integrationsinterval definiert und stetig zu sein hatte.* War bei seinem Beispiel möglicherweise in dieser Beziehung etwas nicht in Ordnung? Fritzli versuchte, die Funktion $1/x^2$ aufzuzeichnen. Tatsächlich: Bei $x = 0$ war der Ausdruck $1/x^2$ gar nicht definiert, und darüber hinaus wurden die Werte dieser Funktion für x in der Nähe von 0 beliebig gross. Nicht einmal der Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

existierte. Wie lautete schon wieder der genaue mathematische Ausdruck dafür? Fritzli erinnerte sich: *Die Funktion* $1/x^2$ *hat bei* $x = 0$ *eine Singularität.* Fritzli beschloss, in der nächsten Mathematikstunde seine Mathematiklehrerin auf das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\, dx$$

anzusprechen und sie zu bitten, ihm das vorzurechnen.

Es sei zum Schluss dieser Geschichte verraten, dass die Lehrerin gleich sah, dass es sich hier wegen der Singularität des Integranden bei $x = 0$ um ein sogenanntes *uneigentliches Integral* handelte. Und sie zeigte Fritzli, wie in diesem Fall eine genauere Untersuchung anzustellen ist. Man müsse zuerst das Integral

$$\int_{0}^{+1} \frac{1}{x^2}\, dx$$

diskutieren; wenn man die Fläche unter der Kurve betrachte, so sei klar, dass dies genau die Hälfte des Wertes des ursprünglichen Integrals ergäbe. Zur Diskussion wähle man an Stelle von 0 zuerst eine unteren Grenze $a, a > 0$ und mache dann den Grenzübergang $a \to 0$, man berechne also

$$\lim_{a \to 0} \left(\int_{a}^{+1} \frac{1}{x^2}\, dx \right) .$$

Da zeige sich dann – die Details könne sie sicher Fritzli überlassen – , dass dieser Limes gar nicht existiere, bzw. dass er unendlich sei. Man könne deshalb auch sagen, dass der Wert von Fritzli's Integral unendlich sei!

Ist es überraschend, dass Fritzli weiterhin mit Freude am Mathematikunterricht teilnahm?