Mathematikunterricht in der Fachmittelschule mit Lernumgebungen

Torsten Linnemann
Pädagogische Hochschule FHNW und
Gymnasium Oberwil

Einleitung

Beim Aufbau der Fachmittelschule wurden keine Kapazitäten bereitgestellt, um die Didaktik auf die besonderen Bedürfnisse der FMS abzustimmen. Gespräche mit Lehrpersonen zeigen schnell, dass viel Arbeit in die Planung des Unterrichts, die Anpassung von Materialien an die Fachmittelschule und in die besonderen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler der Fachmittelschule investiert wird, diese Arbeit aber nicht koordiniert ist.

Auf den folgenden Seiten wird ein Konzept für einen Unterricht in der Fachmittelschule vorgestellt, mit dem ein hohes Engagement der Schülerinnen und Schüler erreicht werden soll. Ziel ist es, die Lernenden kognitiv zu aktivieren, sich also aktiv mit den Lerninhalten auseinandersetzen. Das Konzept stützt sich stark auf sogenannte Lernumgebungen ab und wird anhand konkreter, bereits unterrichtserprobter Beispiele vorgestellt. Es ist Teil des Projektes KAMM, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht an der Mittelschule.

Ich möchte in diesem Zusammenhang auf eine Weiterbildung hinweisen, die ich mit der Weiterbildungszentrale WBZ am 14.3.2013 durchführe:

https://www.wbz-cps.ch/de/kognitiv-aktivierender-mathematikunterricht-der-fachmittelschule

1 Die Situation in der Fachmittelschule

Oftmals wird gesagt, die Fachmittelschule sei die Nachfolgerin der Diplommittelschule. Das stimmt aber nur bedingt: Absolventinnen und Absolventen der Fachmittelschule sollen Zugang zu den gleichzeitig mit der Fachmittelschule entstandenen Fachhochschulen haben. Eine der bedeutendsten Unterschiede zur Diplommittelschule ist, dass die Fachmittelschule in vielen Kantonen zu einem Hauptzubringer für die pädagogische Hochschule geworden ist: Primarlehrpersonen, Kindergärtnerinnen und Kindergärnter besuchen vor ihrem Studium die Fachmittelschule. Die mathematischen Einstellungen der Fachmittelschülerinnen und Fachmittelschüler haben dann wohl recht direkte Effekte auf die mathematischen Erlebnisse der Primarschülerinnen und Primarschüler.

Die Schülerinnen und Schüler einer 1., 2. und 3. Klasse der FMS des Gymnasiums Oberwil haben im Rahmen eines Erhebung unter anderem die folgende Frage beantwortet:

«Meine Motivation im Mathematikunterricht ist 1= klein, 2= eher klein, 3= eher gross, 4= gross»

Schwerpunkt	Anzahl	Mittelwert
Gesundheit	15	2.73
Pädagogik	17	2.24
Kunst	9	2.44
Soziales	14	1.86

Die Motivation in Mathematik liegt im Schwerpunkt G hoch signifikant höher als in S. Auffallend ist der niedrige Wert beim Schwerpunkt P, den viele angehende Primarlehrpersonen besuchen – die dann Mathematik unterrichten müssen.

Es besteht Handlungsbedarf und es lohnt sich, in der Fachmittelschule einen Mathematikunterricht zu geben, der auf die Klientel gut abgestimmt ist. Im Rahmenlehrplan der FMS wird das so formuliert:

«Die Fachmittelschule ist eine allgemein bildende Schule, vermittelt ein berufsfeldbezogenes Angebot und betont intensiv die Persönlichkeitsbildung.»(EDK, 2004)

Im Mathematikteil des Rahmenlehrplans wird daher neben innermathematischen Fähigkeiten auch der Transfer in die Praxis und die Förderung der Problemlösefähigkeit gefordert. Hingegen wird nicht verlangt, dass die Schülerinnen und Schüler aufwändige Techniken automatisiert beherrschen. Verlangt ist ein eher exemplarisches Vorgehen. Zu diesem exemplarisch vertiefenden Vorgehen passt das Konzept von Lernumgebungen, das im Folgenden vorgestellt wird.

2 Lernumgebungen – Treppenzahlen und Hundertertafel

Bei einer «substanziellen Lernumgebung» handelt es sich um eine reichhaltige und vielfältige Aufgabenstellung, die verschiedenen Kriterien genügen soll. Nach Wittmann (1998) handelt es sich dabei um Aufgaben-/Problemstellungen, die zentrale Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts präzisieren, die flexibel an die Gegebenheiten einer Klasse anzupassen sind und reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten bieten.

Eine grosse Stärke dieser Lernumgebungen ist die natürliche Differenzierung. Lernumgebungen sollten einen Einstieg für alle Lernenden bieten – und dann Bearbeitungsmöglichkeiten für alle, auch für Hochbegabte, liefern.

2.1 Treppenzahlen

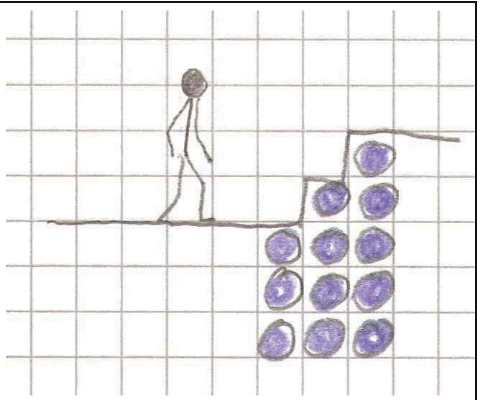
Manche Zahlen lassen sich als Summe von aufeinander folgenden Zahlen schreiben. Beispiele:

$9 = 2 + 3 + 4$ Treppe mit drei Stufen

$9 = 4 + 5$ Treppe mit zwei Stufen

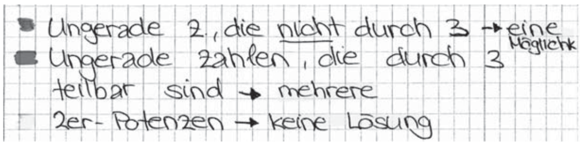
$8 = ?$

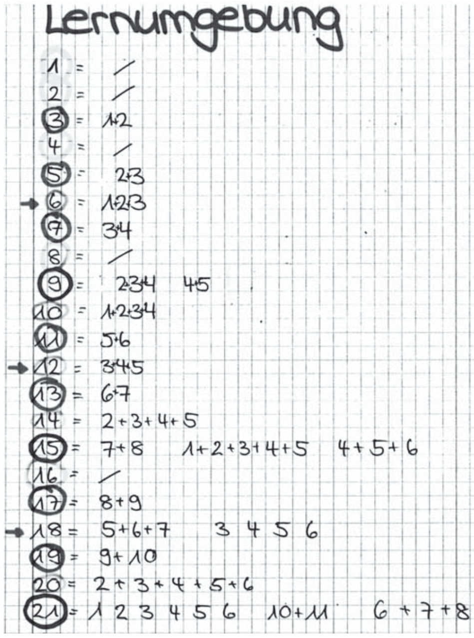
Was können Sie alles über Treppenzahlen herausfinden?



Und das ist auch schon die gesamte Lernumgebung. Die Lernumgebung ist maximal offen formuliert. Es geht vor allem darum, die Schülerinnen und Schüler zu eigenem Experimentieren anzuregen. Das heisst hier, dass sie selbstständig Beispiele bilden müssen, diese Beispielsuche systematisieren müssen und daraus Hypothesen ableiten sollten. Und daraus ergeben sich Ansätze für weitere Beispiele.

Eine gute Idee ist natürlich, systematisch Beispiele zu betrachten, so wie das rechts geschieht.
und daraus Hypothesen zu generieren. Diese sind selbstverständlich nicht immer richtig, bilden aber meistens Anlässe für weitere Überlegungen:





Leuders, Naccarella, Philipp (2011) verwenden diese Lernumgebung für Studien mit Primarlehramtsstudierenden. Sie beschreiben innermathematisches Experimentieren als Suche in drei Räumen: dem Beispielraum, dem Strategieraum und dem Hypothesenraum.

Der Autor (Linnemann, 2012) setzt die Lernumgebung bei Schülerinnen und Schülern der Fachmittelschule ein. Neben der Bestätigung der Ergebnisse von Leuders et al (2011) geht es um Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren. Wie bei Haverty et al. (2000) erweist sich der Wechsel zwischen den drei Räumen als entscheidender Faktor. Gute Erfolgsstrategien sind:

- Anlegen einer breiten Datenbasis
- Beispiele strukturieren, diese intensiv untersuchen.
- Häufiger Wechsel zwischen den 3 Räumen
- Reflexivität, nicht zu lange bei einem unergiebigen Ansatz verweilen
- Ansatz tief untersuchen, Verallgemeinerung versuchen

Treppenzahlen sind tatsächlich sehr breit einsetzbar, auf jeder Altersstufe werden andere Aspekte wichtig. In der FMS passt sie aber nur mit Mühe in den Lehrplan, vielleicht am ehesten in den fakultativen Bereich der Folgen. Die Lernumgebungen, die momentan vom Autor entwickelt werden, sollen diesen Nachteil dann nicht mehr haben.

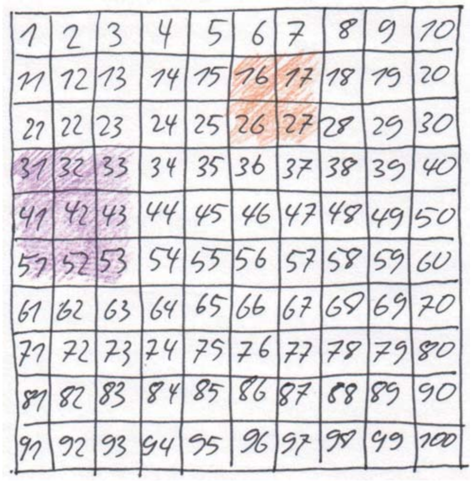
2.2 Die Hundertertafel

Diese Lernumgebung ist inspiriert von einer Lernumgebung im Zahlenbuch 6 (Affolter et al, 2001, S. 94). Dort wird die aus den ersten Klassen bekannte Hundertertafel erneut aufgenommen.

a) Wählen Sie ein Quadrat mit vier Zahlen in der Hundertertafel. Bilden Sie die Summe der Diagonaleinträge (im Beispiel im Bild wäre das $16+27$ und $17+26$. Führen Sie das für mehrere Beispiele durch. Was stellen Sie fest? Können Sie das begründen?

b) Bilden Sie nun die Produkte der Diagonaleeinträge (im Beispiel also $16 \cdot 27$ und $17 \cdot 26$. Führen Sie auch hier mehrere Beispiele aus. Was stellen Sie fest? Begründung?

c) Bilden Sie in verschiedenen Quadraten mit 9 Zahlen die Summe der äusseren 8 Zahlen (im Beispiel 336) und vergleichen Sie mit der mittleren Zahl? Was stellen Sie fest? Können Sie das begründen?



Beim Nachdenken über diese Lernumgebung zeigt sich, dass sich zum Beispiel die 16 mit x, ferner $17 = x+1$, $26 = x+10$ und $27 = x+11$ setzen lassen und mit dieser Algebraisierung Einsichten in die Zusammenhänge finden lassen.

Bei der Behandlung in den Klassen des Autors kam aber keine Schülerin / kein Schüler auf die Idee, einen solchen Lösungsweg zu verfolgen. Der Weg von der Arithmetik zur Algebra war überhaupt nicht gangbar, leider. Hier musste viel Zeit investiert werden.

Als fruchtbar hat sich erwiesen, vorab das Begründen, eine zentrale mathematische Kompetenz, in den Fokus zu rücken. Hier eine beispielhafte Bearbeitung des Aufgabenteils b durch einen Schüler:

«Auf einer Diagonalen gibt es 10 mehr als auf der anderen. Dies ist so, weil man die beiden hinteren Zahlen immer gleich mit sich selber multipliziert.

$$16 \cdot 27 = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 7 + 6 \cdot 20 + 6 \cdot 7$$

$$17 \cdot 26 = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 6 + 7 \cdot 20 + 6 \cdot 7$$

Der einzige Unterschied ist man rechnet einmal die kleinere Zahl der ersten Stelle mit der grösseren Zahl der zweiten Stelle und umgekehrt.
Bsp 2

$$13 \cdot 24 = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 4 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 4$$

$$14 \cdot 23 = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 3 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 4$$»

Dieser Schüler hat das Zehnersystem genutzt, die Rechnung mit dem Distributivgesetz zerlegt und dann den Unterschied benannt. Nach etwas eigenem Nachdenken wird damit klar, warum ein Unterschied von 10 bestehen muss.

Diese und weitere Bearbeitungen wurden genutzt, um über das Begründen in Mathematik zu reflektieren. Eine Zusammenfassung der Antworten:

- Für mich ist eine Begründung gut, wenn man viele Beispiele macht und dann in eigenen Worten die Beispiele erklärt. Eine Begründung muss auf den Punkt sein und nicht langes «Herumgefasel». Sie muss in einem verständlichen und gutem Deutsch geschrieben sein (einfach).
- Sie muss klar und übersichtlich dargestellt sein.
- Eine gute Begründung ist kurz und bündig. Lieber ein allgemeines Beispiel als irgendwelche Zahlen.
- Jeder Schritt wurde erklärt und Zahlen stellen Denkhilfen dar.
- Die Erklärung ist verständlich aufgeschrieben. Zudem ist sie nicht sehr lang. Eine gute Erklärung kann ohne Zahlen auskommen, diese jedoch als Hilfestellung verwenden.

Diese Sammlung von Antworten dient nun in der Klasse als Referenz, wenn etwas (auch von der Lehrperson) begründet werden soll.

Augenöffnend war für den Autoren eine Bearbeitung der Lernumgebung durch eine Gymnasiastin, die die folgende Bearbeitung abgegeben hat:

$$\begin{array}{ll} 16 \cdot 27 = 432 & x \cdot (x+11) = x^2 + 11x \\ 17 \cdot 26 = 442 & (x+1) \cdot (x+10) = x^2 + x + 10x + 10 = x^2 + 11x + 10 \end{array}$$

Dazu kam der Kommentar: «Reicht der Beweis oder muss ich es auch begründen?»

In der Tat, ein Beweis liefert nicht unbedingt eine Begründung, warum etwas so ist. Die arithmetische Schülerlösung mit Hilfe von Beispielen weiter oben hat auch Vorteile.

3 Das Projekt KAMM

Unter dem Begriff KAMM (kognitiv aktivierender Mathematikunterricht in der Mittelschule) werden mehrere eigenständige Projekte zusammengefasst, die aber soweit verzahnt sind, dass daraus ein mathematikdidaktisches Konzept für die Fachmittelschule (FMS) entsteht, das sowohl dem Rahmenlehrplan der FMS als auch aktuellen fachdidaktischen Forschungsergebnissen entspricht. Ein Fokus liegt dabei auf der Entwicklung und Evaluation ausgewählter Materialien, unter anderem von geeigneten Lernumgebungen.

Zusätzlich zu den oben angeführten Kriterien sollen die Lernumgebungen weitere Eigenschaften haben:

- Über eine niedrige Einstiegsschwelle erlauben es die Materialien allen Schülerinnen und Schülern, ihre Problemlösefähigkeiten zu entwickeln.
- Sie sind curricular eingebunden, stellen also keine Inseln im Unterrichtsablauf dar.
- Sie lassen sich in Bewertungssituationen einbinden.
- Sie sind in eine intensive Lernwegbegleitung für die Lernumgebungen eigebettet.

In der Grobstruktur zum Lehrplan 21, Fachbereich Mathematik, werden drei Kompetenzaspekte formuliert. Einer davon wird folgendermassen beschrieben:

«Die Schülerinnen und Schüler lernen *erforschen und argumentieren*: Sie können sich auf unbekannte Zahlenräume und Muster einlassen, Beispiele zu Gesetzmässigkeiten suchen und Zahlen systematisch variieren. Die erlangten Ergebnisse können sie beschreiben, überprüfen, hinterfragen, interpretieren und begründen.» (EDK, 2011)

In der Tat, die beiden vorgestellten Lernumgebungen lassen sich in diesen Aspekt einordnen: die Treppenzahlen mehr beim Erforschen, die Hundertertafel mehr beim Argumentieren. Die Hundertertafel fördert darüber hinaus auch das *Mathematisieren*.

Mit dem Lehrplan 21 wird weiter gefordert, den Mathematikunterricht an Kompetenzen zu orientieren. Diese werden wie oben angedeutet beschrieben. Es ist folgerichtig, diese Kompetenzen auch in Prüfungssituationen zu fordern. Beim Einsatz von Lernumgebungen besteht andernfalls auch die Gefahr, dass die Lernumgebungen als nette Abwechslung gesehen werden, die aber nicht für die Bewertung relevant sind. Das kann das Engagement negativ beeinflussen.

Es ist nicht möglich, Lernumgebungen im Rahmen der üblichen, auch Rechenfertigkeit abfragenden Tests einfliessen zu lassen. Zentral bei Lernumgebungen ist, dass genügend Zeit vorhanden sein muss. Aufgaben mit und ohne Zeitdruck sollten nicht gemischt werden.

Bei den Lernumgebungen des Projekts KAMM werden, wie bei Jundt und Wälti (2011), Beurteilungkriterien mit beschrieben. Das Raster wird nicht eng vorgegeben. Es sollte stattdessen unmittelbar an die Situation im Unterricht geknüpft werden.

4 Literatur

1. Affolter, W., Amstad, H., Doebeli, M. und Wieland, G. (2001): Das Zahlenbuch 6. Zug: Klett und Balmer.
2. EDK, Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (2004): Rahmenlehrplan für Fachmittelschulen. http://edudoc.ch/record/2033/files/5-1d.pdf
3. EDK, Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (2011): Grobstruktur Lehrplan 21. http://lehrplan.ch/sites/default/files/grobstruktur_lp21.pdf
4. Haverty, A., Koedinger, R.K., Klahr, D. & Alibalt, M. (2000): Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. In: Cognitive Science, Vol 24, S. 249-298.
5. Jundt, W. und Wälti, B. (2011): Mathematische Beurteilungsumgebungen; 7. Schuljahr. Zug: Klett und Schulverlag.
6. Leuders, T., Naccarella, D. & Philipp, K. (2011): Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 32(2), 205-231
7. Linnemann, T. (2012): Innermathematisches Experimentieren in Lernumgebungen in der Sekundarstufe. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: Waxmann, online unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/
8. Wittmann, E. (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zur Lehrerbildung 16(3), S. 329-342)

Und, ganz am Schluss, noch einmal der Hinweis auf die Weiterbildung:

https://www.wbz-cps.ch/de/kognitiv-aktivierender-mathematikunterricht-der-fachmittelschule