Dreiecke mit gleichem Umfang und gleichem Flächeninhalt

Peter Gallin, Universität Zürich

Es gibt Leute, die glauben, dass durch die Angabe des Umfangs u und des Flächeninhalts f eines Dreiecks dieses vollständig bestimmt sei. Um diese Vermutung als Irrmeinung zu entlarven, wollen wir zeigen, dass es für gegebene Parameter u und f eine ganze Schar von nicht-kongruenten Dreiecken gibt. Konkret stellen wir uns folgende Aufgabe: Betrachte ein positiv orientiertes Dreieck ABC mit der variablen Grundseite $c = AB$, die wir auf die horizontale x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems legen. Der Eckpunkt A soll im Ursprung liegen und B auf der positiven x-Achse hin und her wandern (Abbildung 1). Jetzt stellt sich die Frage, auf welcher Kurve sich der Eckpunkt C bewegt, wenn verlangt wird, dass der Umfang u und der Flächeninhalt f konstant bleiben. Damit wird c zum Parameter der gesuchten Ortskurve von C.

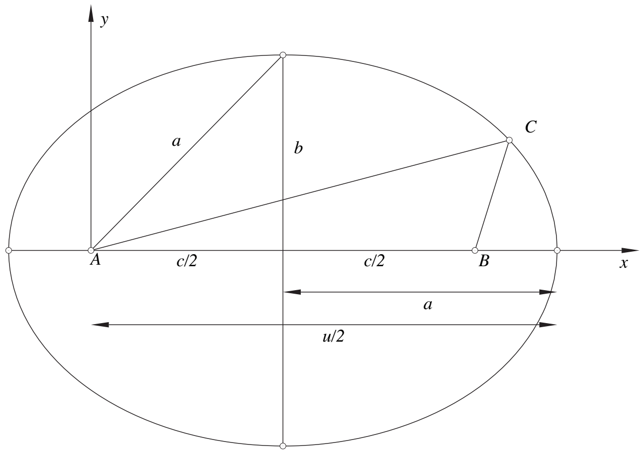

Abbildung 1: Dreieck ABC mit fester Grundseite und festem Umfang

Lassen wir vorerst c konstant und bestimmen die Ortskurve von C, wobei wir nur den konstanten Umfang u des Dreiecks ABC, nicht aber die Flächenbedingung — die Konstanz von f — berücksichtigen. Damit wandert C auf der Gärtnerellipse mit den Brennpunkten A und B. Der auf der positiven x-Achse liegende Scheitelpunkt dieser Ellipse hat die Entfernung $\frac{u}{2}$ von A. Wir bestimmen nun die Mittelpunktsgleichung der Ellipse mit den Halbachsenlängen a und b, die wir durch u und c ausdrücken: Aus Abbildung 1 lesen wir ab, dass $a = \frac{u}{2} - \frac{c}{2}$. Daraus ergibt sich mit Pythagoras $b^2 = a^2 - (\frac{c}{2})^2 = (\frac{u}{2} - \frac{c}{2})^2 - (\frac{c}{2})^2 = (\frac{u}{2})^2 - (\frac{u}{2})c = (\frac{u}{2})(\frac{u}{2} - c)$. Somit lautet die Ellipsengleichung

$$\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(x-\frac{c}{2})^2}{(\frac{u}{2}-\frac{c}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{u}{2})(\frac{u}{2}-c)} = \frac{(2x-c)^2}{(u-c)^2} + \frac{4y^2}{u(u-2c)} = 1 \; .$$

Auf dieser Ellipse läuft C, solange bei gegebenem u die Seitenlänge c festgehalten wird. Nun verlangen wir zusätzlich, dass der Flächeninhalt f konstant bleiben soll, womit wir $\frac{yc}{2} = f$ oder $y = \frac{2f}{c}$ beachten müssen. Setzen wir diese Bedingung in der Ellipsengleichung ein und lösen diese nach x auf, so erhalten wir die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte der horizontalen Geraden $y = \frac{2f}{c}$ mit der Ellipse. Lassen wir jetzt aber c frei, so ergibt sich die Parameterdarstellung der gesuchten Ortskurve für C bei variablem c $(0 < c < \frac{u}{2})$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(c) & = & \dfrac{c}{2} \pm \dfrac{u-c}{2}\sqrt{1 - \dfrac{16f^2}{c^2u(u-2c)}} \\ y(c) & = & \dfrac{2f}{c} \end{array} \right\}$$

Abbildung 2 zeigt ein konkretes Beispiel für $u = 40$ und $f = 40$. Damit obige Parameterdarstellung der Ortskurve reelle Punkte liefert, muss die darin enthaltene Diskriminante mit $u > 2c$ positiv sein: $c^2u(u - 2c) - 16f^2 > 0$. Diese Ungleichung dritten Grades liefert für $u = 40$ und $f = 40$ näherungsweise den im Positiven liegenden Bereich $4.551221 < c < 19.125135$. In Abbildung 2 variiert deshalb die Variable c — die Grundseitenlänge c des Dreiecks ABC — über die ganzen Zahlen von 5 bis 19. Für $c = 19$ ergibt sich einerseits die innerste Ellipse bei konstantem Umfang $u = 40$ und die unterste Parallele zur x-Achse bei konstantem Flächeninhalt $f = 40$. In den Schnittpunkten sind beide Bedingungen erfüllt. Die zweitinnerste Ellipse resp. die zweitunterste Parallele entsprechen $c = 18$, usw. bis für $c = 5$ zum letzten Mal die oberste Parallele die zugehörige äusserste Ellipse überhaupt schneidet.

Die Ortskurve ist die Menge aller Schnittpunkte von Ellipse zum Parameter c und zugehöriger x-Achsen-Parallele zum Parameter c. Sie zeigt alle möglichen Lagen des Punktes C an, während A im Ursprung fest bleibt und c (die Lage von B) von etwa 4.551221 bis etwa 19.125135 variiert. Alle diese Dreiecke ABC haben $u = 40$ und $f = 40$. Man kann $c = \frac{80}{y}$ aus der Parameterdarstellung eliminieren und erhält eine explizite Darstellung der Ortskurve für C, welche beispielsweise so lautet:

$$x(y) = \frac{40}{y} \pm (y-2)\sqrt{\frac{400}{y^2} - \frac{y}{y-4}}$$

Die Graphen der beiden Äste schliessen lückenlos und glatt aneinander an, sobald obige Diskriminante Null wird, d. h. für $y_1 = 4.18297\ldots$ oder für $y_2 = 17.5777\ldots$. So entsteht eine geschlossene ovale Kurve.

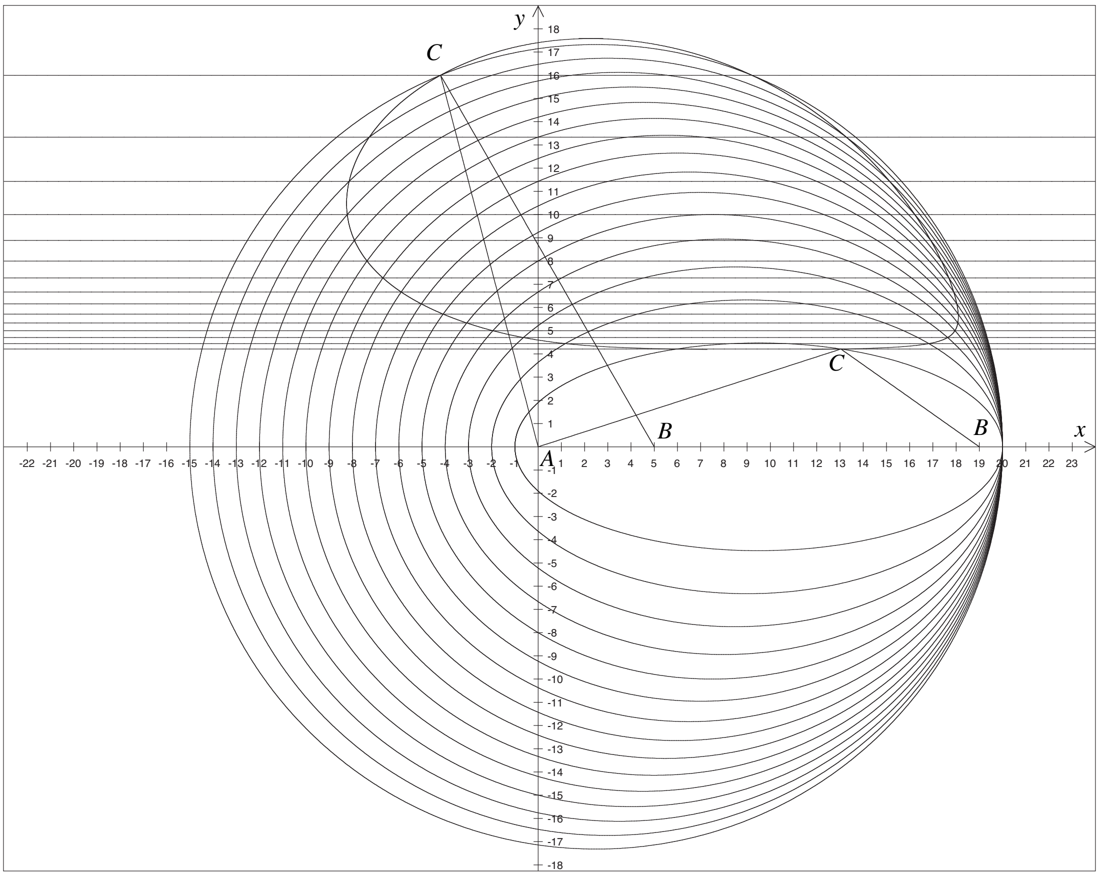

Abbildung 2: Viele Dreiecke mit festem Umfang 40 und festem Flächeninhalt 40