Aha! Mathematik! – Teil I.

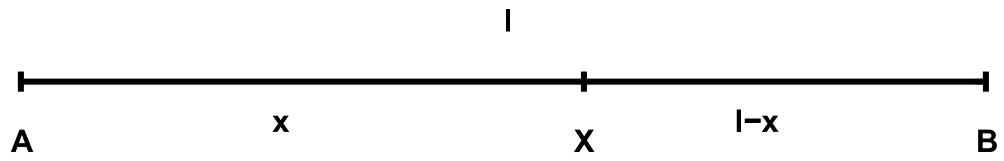
Die mathematische Geschichte von Romeo und Julia.

Urs Stammbach

Das Shakespeare'sche Liebespaar Romeo und Julia ist gut bekannt, das mathematische kennt kaum jemand. Romeo wohnte damals in der Stadt A und Julia in der Stadt B. Wie es sich für ein Liebespaar gehört, wollten sich die beiden periodisch treffen. Das war an sich kein Problem, da Romeo ein Auto fuhr, natürlich ein Auto der Marke Alfa. Auch Julia war motorisiert, sie verfügte über ein Motorrad, dessen Marke ich leider vergessen habe, es mag ein Motorrad der Marke Beta gewesen sein. Die beiden, besonders Julia, waren – damals schon – sehr umweltbewusst, und so bestand Julia darauf, den Treffpunkt zwischen den Städten A und B so auszuwählen, dass der Energieverbrauch für die Fahrten minimal war.

"Kein Problem", meinte Romeo, "das ist ein klassisches Extremalproblem, das sich mathematisch behandeln lässt. Das habe ich im Mathematikunterricht am Gymnasium gelernt, und ich habe es damals – im Gegensatz zu einigen anderen – auch gut verstanden!"

Romeo witterte offenbar eine Chance, Julia zu imponieren, und er ging die Rechnung deshalb gleich ganz allgemein an.



"Mein Alfa braucht pro Kilometer a Liter Benzin, während dein Beta-Motorrad nur die Hälfte, $a/2$ Liter verbraucht. Die Entfernung unserer Städte A und B beträgt l Kilometer. Wir wollen uns irgendwo dazwischen, sagen wir in X treffen. Die Distanz AX sei x Kilometer; dann ist die Distanz XB natürlich $l - x$ Kilometer. Bist du einverstanden, Julia?"

Julia nickte, und Romeo fuhr fort:

"Jetzt kommt die geniale Rechnung! Der Benzingesamtverbrauch $G = G(x)$ unserer Fahrten hängt natürlich vom Ort X ab, an dem wir uns treffen wollen. Also:

$$G(x) = 2 \cdot a \cdot x + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot (l - x) \ .$$

Romeo fühlte sich auf der Höhe seines erworbenen Wissens!

"Um das Minimum des Benzinverbrauchs, also der Funktion $G(x)$ zu bestimmen, muss man etwas Differentialrechnung beherrschen; man muss die Funktion nach der Variablen x ableiten und die Ableitung gleich Null setzen. Das ist in diesem Fall *sehr* einfach; nämlich

$$G'(x) = 2 \cdot a - a \stackrel{!}{=} 0 \ .$$

Nach kurzer Überlegung wurde Romeo nachdenklich. Er hatte bemerkt, dass sich seine Gleichung offenbar auf $a = 0$ reduzierte. Das war offenbar ein Unsinn, denn a ist die Konstante, die den Benzinverbrauch der Fahrzeuge bestimmt. Romeo fasst sich aber sofort wieder:

"Julia, es tut mir leid, unser Problem hat mathematisch keine Lösung, wir können uns deshalb in Zukunft nicht mehr treffen!"

Julia wollte ein solches Verdikt nicht akzeptieren, auch wenn Romeo es wissenschaftlich untermauert hatte. Sie überlegte kurz und meinte:

"Schau Romeo, Du magst mathematisch begabt sein, aber ich kann unser Problem auch ohne Mathematik lösen, einfach mit gesundem Menschenverstand. Da ich mit meinem Motorrad pro Kilometer nur die Hälfte Benzin verbrauche, wie Du mit deinem Superauto, ist doch klar, dass *ich* die ganze Fahrt von B nach A und zurück machen muss. Du kannst dein Auto in A stehen lassen und einfach zu Hause bleiben; ich besuche dich dort. Der Benzingesamtverbrauch ist dann $2 \cdot \frac{a}{2} \cdot l = a \cdot l$ und das ist – soweit ich sehe – wirklich das Minimum von $G(x)$."

Romeo schaute etwas zerknirscht in die Welt. Nach kurzer Überlegung musste er aber Julia recht geben, und in der Folge trafen sich die beiden oft in A, zu Hause bei Romeo!

Trotzdem, die Sache war Romeo etwas peinlich, und er machte sich deshalb weiterhin Gedanken darüber, was denn bei seiner Rechnung schief gelaufen war. Jedenfalls war klar, einen Rechenfehler hatte er nicht gemacht. Aber weshalb findet man hier das Minimum der Funktion $G(x)$ nicht dort, wo die Ableitung $G'(x)$ Null wird? So hatte er es doch in der Schule gelernt! Hatte er etwa damals nicht gut aufgepasst? War damals im Mathematikunterricht eventuell noch die Rede davon gewesen, dass die Extrema manchmal auch an den *Grenzen des Definitionsbereiches* der Funktion angenommen werden?