Bericht zu einer Maturaarbeit

Leandro Moldes (Matura 2011), Dr. Karl Stoop (Betreuer)

Berner Maturitätsschule für Erwachsene (BME)
Gymnasium Bern - Neufeld

L. Moldes entschied sich im Frühling 2010 seinen Interessen entsprechend eine Maturaarbeit zum Thema „Diophantische Gleichungen“ zu verfassen. Um die Arbeit nicht fast ausschliesslich auf Bekanntes zu stützen, schlug der Betreuer vor, ein besonderes Augenmerk auf die Diophantische Gleichung

$$2x^2 + y^2 = z^3 \qquad (\text{mit } x, y, z \in N)$$

zu richten. Diese Gleichung wurde nicht der Literatur entnommen, sondern nach kurzem Experimentieren gewählt, nachdem einige Lösungen mit kleinen Zahlen erkannt worden waren (z.B. (3/3/3), (1/5/3), (10/4/6)).

L. Moldes packte die Aufgabe so an, dass er zuerst Spezialfälle untersuchte:

1. $x = y = z$: Die Gleichung lautet dann $3x^2 = x^3$, nach Division durch x^2 folgt $x = 3$, also gibt es einzig die Lösung (3/3/3).

2. $x = y$: Die Gleichung lautet dann $3x^2 = z^3$ und wegen der Identität $3(3a^3)^2 = (3a^2)^3$ gibt es unendlich viele Lösungen, alle mit ggT(x,y,z) = $3a^2 = z$. Beispiele: a = 1 → (3/3/3), a = 2 → (24/24/12), a = 3 → (81/81/27).

3. $x = z$: Die Gleichung lautet dann $2x^2 + y^2 = x^3$, es folgt $y^2 = x^2(x-2)$, da links eine Quadratzahl steht, muss dies auch rechts sein, folglich ist notwendig und hinreichend, dass $x-2$ eine Quadratzahl ist. Beispiele: x = 3 → (3/3/3), x = 6 → (6/12/6), x = 11 → (11/33/11). Es gibt also unendlich viele Lösungen, alle mit ggT(x,y,z) = x = z.

4. $y = z$: Die Gleichung lautet dann $2x^2 + y^2 = y^3$ bzw. $2x^2 = y^3 - y^2 = y^2(y-1)$. Diese Gleichung $2x^2 = y^2(y-1)$ hat keine Lösungen mit geradem y, denn dann hätte die Zahl links eine ungerade Anzahl Primfaktoren 2, die Zahl rechts jedoch eine gerade Anzahl Primfaktoren 2. Folglich ist noch der Fall y ist ungerade, d.h. y hat die Form $y = 2n + 1$ zu verfolgen:
Die Gleichung lautet damit $2x^2 = (2n+1)^3 - (2n+1)^2$, Klammern aufgelöst und vereinfacht:

$$2x^2 = 8n^3 + 8n^2 + 2n$$
$$x^2 = 4n^3 + 4n^2 + n = (2n+1)^2 n$$
$$\text{also} \quad x = (2n+1)\sqrt{n}\,,$$

folglich ist notwendig und hinreichend, dass n eine Quadratzahl ist → $y = z = 2m^2 + 1$.
Mit diesem Ansatz folgt $2x^2 = (2m^2+1)^3 - (2m^2+1)^2$, Klammern aufgelöst und vereinfacht

$$2x^2 = 8m^6 + 8m^4 + m^2 = (2m^3 + m)^2$$
$$x^2 = 4m^6 + 4m^4 + m^2 = (2m^3 + m)^2$$
$$\text{also} \quad x = 2m^3 + m$$

folglich sind alle Tripel $(2m^3 + m, 2m^2 + 1, 2m^2 + 1)$ mit $m \in N$ unendlich viele Lösungen, alle mit ggT(x,y,z)= y = z. Beispiele: m = 1 → (3/3/3), m = 2 → (18/9/9), m = 3 → (57/19/19).

Es gilt also die algebraische Identität $2(2m^3 + m)^2 + (2m^2 + 1)^2 = (2m^2 + 1)^3$

5. Alle drei Variablen verschieden: Auf ähnliche Weise wie unter 4. hat L. Moldes die algebraische Identität

$$2(2a^3 + ab^2)^2 + (2a^2b + b^3)^2 = (2a^2 + b^2)^3 \qquad (*)$$

gefunden und folglich gilt $2x^2 + y^2 = z^3$ mit $z = 2a^2 + b^2$

$x = 2a^3 + ab^2 = a(2a^2 + b^2) = az$

und $y = 2a^2b + b^3 = b(2a^2 + b^2) = bz$

Für $a \neq b$ und $a > 1$, $b > 1$ sind diese drei Zahlen x, y und z alle verschieden und es werden unendlich viele Lösungstripel beschrieben, alle mit ggT(x,y,z) = z.

Beispiele: a = 2, b = 3 → (34/51/17), a = 3, b = 2 → (66/44/22).

6. Numerische Auswertungen zeigen, dass es auch Lösungen mit ggT(x,y,z) < z gibt, insbesondere solche mit ggT(x,y,z) = 1. Beispiele sind etwa (1/5/3), (10/4/6) oder (38/45/17). Diese können zumindest teilweise auch mit der Formel (*) erhalten werden, wenn für a und b auch Brüche verwendet werden, etwa (1/5/3) mit $a = {}^1/_3$ und $b = {}^5/_3$.

Alle Lösungen der Gleichung $2x^2 + y^2 = z^3$ mit $z < 20$
(grau unterlegt sind die Lösungstripel mit ggT(x,y,z) = 1)

x	y	z
3	3	3
1	5	3
10	4	6
6	12	6
18	9	9
12	21	9
10	23	9
25	9	11
11	33	11
8	40	12
24	24	12
38	45	17
34	51	17
46	40	18
42	48	18
18	72	18
57	19	19
45	53	19

An dieser Stelle wird die Untersuchung in der Maturaarbeit abgebrochen. Hinterher wurden noch einige zusätzliche Ergebnisse gefunden, z.B. dass aus der Lösung (1/5/3) weitere Lösungen $(n^3/5n^3/3n^2)$ mit $n \in N$ folgen. Die Frage, ob es unendlich viele Lösungen mit ggT(x,y,z) = 1 gibt, konnte nicht beantwortet werden.