Darstellung von Objekten nahe Lichtgeschwindigkeit

Dardan Lajqi, Jonathan Theodore

Einleitung

Seit Einstein 1905 die spezielle Relativitätstheorie herausbrachte, wissen wir, dass die Welt nicht mehr so einfach zu verstehen ist. Zwei einfache Postulate waren Grundlage dieser Theorie: Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die Gleichheit der physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen. Durch diese zwei Postulate kann man herleiten, dass bei bewegten Objekten und ruhenden Objekten die Zeit nicht gleich schnell verläuft und dass bewegte Objekte in Bewegungsrichtung kontrahiert sind. Mit Letzterem beschäftigen wir uns in diesem Artikel. Und zwar wollen wir einen Weg finden, ein bewegtes Objekt „richtig“ darzustellen.

Darstellung schnellbewegter Objekte

Um eine Seitenlänge bei hohen Geschwindigkeiten zu berechnen, gibt es einen Stauchungsfaktor. Dieser ist $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Die Geschwindigkeit eines Objekts ist vorgegeben und so kann man den Stauchungsfaktor errechnen und diesen mit der Seitenlänge in Bewegungsrichtung multiplizieren. Das Problem dabei ist, dass man die Lichtlaufzeit nicht berücksichtigt. Das Licht benötigt eine gewisse Zeit, bis es beim Auge oder bei der Kamera ankommt, und dieser Effekt verändert wieder alles.
Von Vorteil wäre nun, wenn wir eine Formel hätten, die die Laufzeit enthält. Diese finden wir bei der Lorentz-Transformation.

Die **Lorentz-Transformation**:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma \cdot (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma \cdot \left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x &= \gamma \cdot (x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma \cdot \left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Man kann sich jedes Objekt aus einer unendlichen Zahl von Punkten vorstellen. Alle Koordinaten dieser Punkte sind uns bekannt. Die Aufgabe besteht darin, sie in unser Inertialsystem umzurechnen.
Wir stellen uns nun vor, dass wir ruhen und dass das Objekt auf uns mit der Geschwindigkeit *v* zufliegt. Das Objekt befindet sich im Inertialsystem *K* und wir uns im *K'*. Nun wählen wir einen beliebigen Zeitpunkt *t* und schauen, welche Koordinaten ein beliebiger Punkt des Objekts hat. Wir notieren die Koordinaten und rechnen sie ins Inertialsystem *K'* um. Natürlich müssen wir auch noch die Zeit *t* in *t'* umrechnen. Das machen wir mit diesen vier Formeln

$$x' = \gamma \cdot (x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Nun haben wir (*x*/*y*/*z*) in unser ruhendes Inertialsystem *K'* umgerechnet. Wir müssen noch den Zeitpunkt herausfinden, zu dem die Kamera das Bild macht. Dies schaffen wir, angenommen die Kamera liegt auf dem Origo, in dem wir die drei Koordinaten vom ruhenden System nehmen und sie durch die Lichtgeschwindigkeit teilen und *t'* dazurechnen.

$$\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{c} + t' = t_2' \quad (I)$$

Der Zeitpunkt, zu dem die Kamera das Bild schiesst, ist t_2'. Nun müssen wir herausfinden, wo die anderen Punkte zum Zeitpunkt t_2' sind. Dazu nehmen wir Gleichung *(I)* und setzen *y'*=*y* und *z'*=*z* ein.

$$\frac{\sqrt{x'^2 + y^2 + z^2}}{c} + t' = t_2'$$

Eine Variable haben wir noch nicht ersetzt, nämlich *t'*. Dazu verwenden wir eine Formel der Lorentztransformationen.

$$x = \gamma \cdot (x' + vt')$$

Diese Formel lösen wir nach *t'* auf:

$$t' = \frac{x - \gamma x'}{\gamma v}$$

Nun setzen wir das in die Gleichung ein.

$$\frac{\sqrt{x'^2 + y^2 + z^2}}{c} + \frac{x - \gamma x'}{\gamma v} = t_2'$$

Um diese Gleichung nach *x'* aufzulösen, nehmen wir Mathematica zur Hilfe.

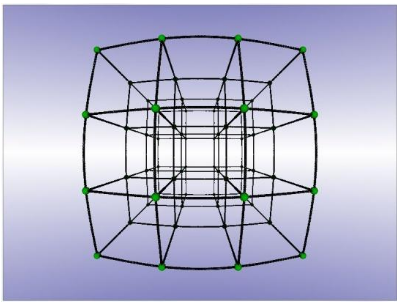
$$\text{In[7]:= Solve}\left[\left\{\frac{\sqrt{x1^2+y^2+z^2}}{c}+\frac{x-y1*x1}{y1*v}==t2\right\},\{x1\}\right]$$

$$\text{Out[7]=}\ \left\{\left\{x1\to\frac{c^2\,x\,y1-c^2\,t2\,v\,y1^2-\sqrt{c^2 v^2 x^2 y1^2-2c^2\,t2\,v^3\,x\,y1^3+c^2\,t2^2\,v^4\,y1^4+c^2 v^2 y^2 y1^4-v^4 y^2 y1^4+c^2 v^2 y1^4 z^2-v^4 y1^4 z^2}}{c^2\,y1^2-v^2\,y1^2}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{x1\to\frac{c^2\,x\,y1-c^2\,t2\,v\,y1^2+\sqrt{c^2 v^2 x^2 y1^2-2c^2\,t2\,v^3\,x\,y1^3+c^2\,t2^2\,v^4\,y1^4+c^2 v^2 y^2 y1^4-v^4 y^2 y1^4+c^2 v^2 y1^4 z^2-v^4 y1^4 z^2}}{c^2\,y1^2-v^2\,y1^2}\right\}\right\}$$

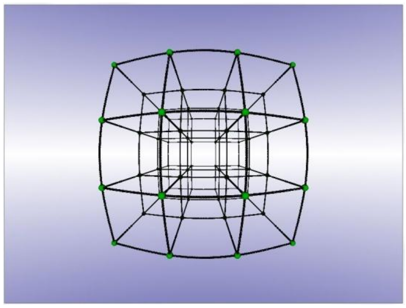
Da es eine quadratische Gleichung ist, erhält man zwei Lösungen. Beim Programmieren haben wir später festgestellt, dass beide Lösungen richtig sind. Die Lösung mit dem Pluszeichen braucht man bei positiven Geschwindigkeiten. Die Lösung mit dem Minuszeichen bei negativen Geschwindigkeiten. Nun können wir alle Punkte in unser Inertialsystem *K'* übertragen.

Beispiel

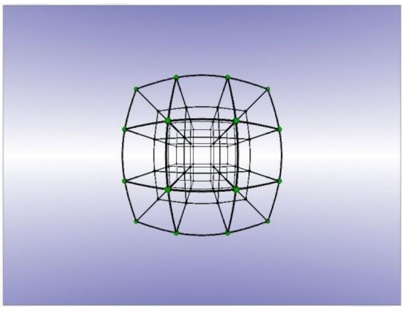
Um unsere Lösung zu testen, haben wir es auch gleich an einem Beispiel ausprobiert. Dazu liessen wir einen Würfel mit verschiedenen Geschwindigkeiten auf uns zufliegen.



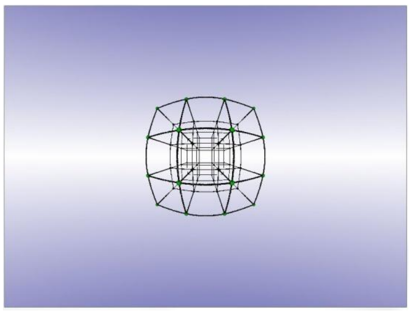
70% der Lichtgeschwindigkeit



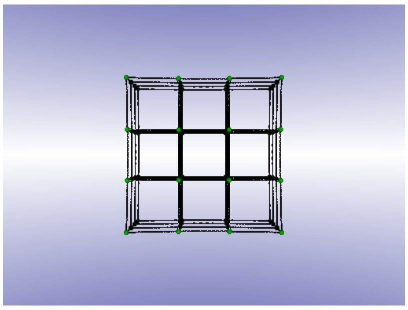
80% der Lichtgeschwindigkeit



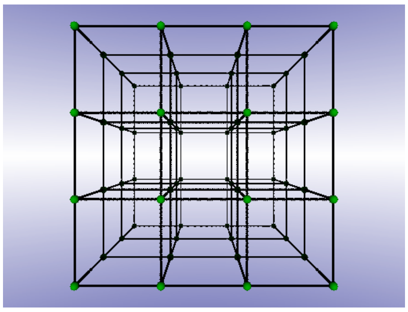
90% der Lichtgeschwindigkeit



95% der Lichtgeschwindigkeit



-80% der Lichtgeschwindigkeit



0% der Lichtgeschwindigkeit

Erklärung der sichtbaren Effekte

Bei den Bildern, bei denen die Geschwindigkeit positiv ist, sehen wir eine Verlängerung des Würfels in die Tiefe. Es ist das Gegenteil von dem, was man erwartet, aber es lässt sich durch die Lichtlaufzeit begründen. Wenn die Geschwindigkeit positiv ist, bewegt sich der Würfel mit der Geschwindigkeit v auf die Kamera zu. Stellen wir uns 2 Punkte im Würfel vor, einer vorne, einer hinten. Wenn die beiden Punkte gleichzeitig einen Lichtstrahl zur Kamera werfen, wird der Lichtstrahl vom vorderen Punkt zuerst ankommen. Damit beide Lichtstrahlen gleichzeitig ankommen, muss der vordere Punkt seinen Lichstrahl später werfen, dabei bewegt er sich auf die Kamera zu und so kommt es, dass der Würfel verlängert aussieht. Der Effekt der Lichtlaufzeit hebt somit den Effekt der Längenkontraktion auf. Auch die Krümmung kann durch die Lichtlaufzeit erklärt werden, da ein Punkt aussen am Würfel den längeren Weg zur Kamera hat, als ein Punkt in der Mitte vom Würfel.

Wenn die Geschwindigkeit negativ ist, dann bewegt sich der Würfel von der Kamera weg. Der Lichtlaufzeiteffekt wirkt dann genau umgekehrt. Der Würfel wird in Bewegungsrichtung gekürzt. Die Effekte der Lichtlaufzeit und der Längenkontraktion summieren sich.

Schlusswort

Wir danken Herrn Pierre Mandrin, dass er unsere Arbeit überprüft und unsere Ergebnisse mit der Aberrationsmethode bestätigt hat.

Quellen

http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de
http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/bewegung/bewegung3.html
http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/mp/relativ/index
http://f-lohmueller.de/
http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/phantom/pdnw97.pdf

Software:
http://www.povray.org/