

Buchbesprechung

H.R. Schneebeli

28. November 2010

Differential- und Integralrechnung

Eine anwendungsbezogene Einführung mit TI-Nspire™ CAS, 2. erweiterte und überarbeitete Auflage 2010, Robert Märki, vii und 188 Seiten, ©Texas Instruments, erhältlich über die TI-Materialdatenbank: www-ti-unterrichtsmaterialien.net

Dieser Text gibt eine kompetente Antwort auf wesentliche Fragen, die sich alle stellen sollten, die Mathematik am Gymnasium unterrichten:

- Welchen Stellenwert hat das Aufzeichnen von *Funktionsgraphen* in der Analysis? Bedrohen Grafikrechner die Qualität des Unterrichts?
- Wie wesentlich sind die algorithmisch ausführbaren *Rechenregeln* der Analysis für die Allgemeinbildung oder als Grundlagen einer Ausbildung nach dem Gymnasium?
- Welches sind die tragenden Elemente in der elementaren Analysis? Welche Beziehung besteht zwischen den Algorithmen des *Differentialkalküls* und jenen *Grundbegriffen*, mit denen in der Schulanalysis argumentiert wird?
- Welche Rolle sollen *numerische Verfahren* in der gymnasialen Mathematik spielen? Was haben numerische Gleichungslöser, numerisches Differenzieren, numerische Integration mit Analysis zu tun?
- Wie zentral sind Extremalaufgaben in der gymnasialen Analysis?
- Auf welche interessanten Gebiete und motivierenden Beispiele müssen wir verzichten, weil uns die *Zeit fehlt*, sie angemessen im Gymnasium zu behandeln?
- Welchen Nutzen zieht das Gymnasium aus einem durchdachten *Einsatz von Technologie* im Mathematikunterricht?
- Welchen Nutzen haben Erstsemestriker an den Hochschulen, wenn sie ein *qualitatives Verständnis für dynamische Systeme* dank dem Einsatz von Technologie schon aus dem Gymnasium mitbringen? Was hilft es, wenn sie erste Erfahrungen mit Begriffen wie Vektorfeld, Stromlinie, dynamisches System mitbringen und wenn ihnen eine einfache Technologie dazu Anschauungen in typischen Beispielen und Anwendungen vermitteln konnte?

Robert Märki gibt auf diese Fragen wohl durchdachte und im Unterricht erprobte Antworten. Es lohnt sich auf jeden Fall, seine Erfahrungen zur Kenntnis zu nehmen.

Ein besonderes Qualitätsmerkmal des Textes: Er ist kurz und er bringt eine Auswahl der zentralen und wesentlichen Ideen und Ergebnissen der Analysis auf den Punkt. Wer

dieses Buch durcharbeitet, erreicht alle Ziele im Analysisunterricht, die eine erfolgreiche Fortsetzung an den Hochschulen garantieren. Aber es gilt mehr: Die Motivation für die behandelte Mathematik ist stimmig, sie steht im richtigen historischen Kontext – auch und gerade aus heutiger Perspektive, weil moderne Hilfsmittel helfen, diese Grundlegendes anschaulich zu vermitteln. Wenn sich Rechnungen automatisieren lassen, gewinnt man Zeit und Freiraum, um Gedankengänge begrifflich zu verankern und tiefere Zusammenhänge aufzudecken. Der Autor hat sich weise auf eine knappe Auswahl beschränkt. Alles, was er bearbeitet, wird gut begründet und mustergültig ausgeführt. Damit sind wesentliche Voraussetzungen für einen nachhaltigen Unterricht erfüllt.

Es folgt eine kurze Übersicht zu den Inhalten: Veränderung und Änderungsrate sind Anlass zur Definition der Ableitung. Von Beginn an werden Prozesse betrachtet und Differentialgleichungen benutzt, um Prozesse zu beschreiben. Ausgangspunkt ist Newton's Abkühlungsgesetz. Wer Differenzenquotienten versteht, kann sie nutzen, um mit dem Abkühlungsgesetz – einer Differentialgleichung – die Temperatur in der Zukunft näherungsweise vorauszusagen. Die einfache Methode von Euler kommt damit rasch zum Zug. In knapper Form wird der *Ableitungsbegriff* als Grenzwert eingeführt. Die Idee der Linearisierung wird erlebbar: Wenn man mit dem 'Mikroskop' in die kleinen Umgebungen eines Punktes auf einem glatten Funktionsgrafen hineinzoomt verschwindet die Krümmung!

Es folgen einige Ableitungen bei speziellen Funktionen und die generischen Ableitungsregeln. Typische Anwendungen der Ableitung ergänzen die Begriffsbildung. Ein Kaptiel ist dem Paar Exponential- und Logarithmusfunktion gewidmet. Auf den folgenden 20 Seiten werden elementare aber interessante Beispiele zu Differentialgleichungen aus allerlei Anwendungen aus der Sicht der Modellbildung behandelt. Wiederum liefert Eulers Verfahren erste Näherungen an Lösungen.

Die Behandlung des Integrals ist auf dem Weg zu formalen Lösungen von Differentialgleichungen natürlich unverzichtbar. Das bestimmte Integral wird als Grenzwert von Riemannsummen eingeführt. Der Hauptsatz ist als Anfangswertproblem formuliert.

Nach weniger als 100 Seiten beginnt das zentrale Kapitel mit Dynamischen Systemen in einer sehr gut gestalteten geometrischen Einkleidung: Vektorfelder im Phasenraum, Stromlinien als Lösungen. Wiederum nehmen numerische Näherungsverfahren dem Thema die Schärfe und bereiten einen unmittelbaren Zugang zur zentralen Botschaft vor: Wesentliche schulgerechte Anwendungen aus verschiedenen Wissensgebieten.

Nebenbei sei bemerkt: Newton hat (stark vereinfacht gesagt) Grundlagen der Analysis gelegt, um mit der Lösung von Differentialgleichungen zeigen zu können, wie die Keplergesetze aus dem Gravitationsgesetz folgen. Der Ausbau der Himmelsmechanik hat vor mehr als 100 Jahren eine modernere Sicht auf Differentialgleichungen eröffnet: dynamische Systeme. Es ist erfreulich, dass Robert Märki uns zeigt, wie die Schulmathematik sich diesem Thema öffnen kann, wenn die Prioritäten im Unterricht entsprechend gesetzt werden.

Ein kurzes Kapitel zu den trigonometrischen Funktionen und Schwingungen zeigt eine moderne Darstellung eines bekannten Themas.

Die Technologie bringt es wiederum mit sich, dass die Rechenlast beim Thema Taylorentwicklung unbedeutend wird. Die Grafikfähigkeit vermittelt zudem sofort die wesentlichen geometrischen Einsichten über Funktionsgrafen und Taylornäherungen. Wir sehen unmittelbar die Idee: verallgemeinerte Tangenten höherer Ordnung.

Separation der Variablen ist die einzige analytische Methode, die zum Lösen explizit ausgearbeitet wird. Sie wird dann benutzt für die Lösung der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Der Text wird abgerundet durch Lösungen zu den Aufgaben, Hinweise zum Einsatz des

TI-Nspire™ CAS mit Beispielen, die vorführen, wie dieses Werkzeug klug eingesetzt werden kann, um Ordnung in die Vielfalt der Funktionsgraphen zu bringen. Das gelingt nur dank mathematischem Verständnis für den (geistigen) Werkstoff und das real existierende Werkzeug, hier ein CAS-Rechner. Damit schliesst der Autor auch einen Generalverdacht aus: ‘Knopfdruckmathematik’ ist keine zwingende Folge des CAS-Einsatzes.

Obwohl der Autor seine Beispiele auf eine spezielle Hard- und Software ausrichtet, sind seine Anregungen, Ergebnisse, Einsichten von grosser Tragweite und allgemeinem Interesse. Die Folgerungen sind im wesentlichen unabhängig vom konkret verwendeten Hilfsmittel. Allerdings sind die im Buch verwendeten Werkzeuge bezüglich Handhabung und Leistung speziell auf den Unterricht im Gymnasium zugeschnitten. Die Software kann auf einem PC oder auf einem Handheld benutzt werden. Wer diese Mittel einsetzt, kann viele Beispiele aus dem Text ohne Zusatzaufwand unmittelbar im eigenen Unterricht übernehmen.

Vielleicht sind Sie, liebe Leserin, lieber Leser auch beeindruckt von Märkis Text. Vielleicht zweifeln Sie noch, ob Sie oder Ihre Schüler damit auch arbeiten könnten. Versuchen Sie es auf jeden Fall. Beginnen Sie vielleicht mit Teilen aus dem Text im Rahmen des Schwerpunktfaches PAM oder in einer Arbeitswoche. So können Ihnen echte Anwendungen aus Physik, Biologie, Chemie gelingen und Ihren Schülern Grunderfahrungen zur Modellbildung ausserhalb der Mathematik vermitteln. Überlegen Sie aufgrund der eigenen Erfahrungen, wie auch Ihre Klassen im Grundkurs von neuen Perspektiven und vom Technologieeinsatz profitieren könnten. Damit wäre eine zukunftssträchtige Entwicklung angestossen. Robert Märkis eigene berufliche Laufbahn wurde davon wesentlich geprägt. Es ist äusserst verdienstvoll, dass er seine Materialien mit uns allen teilt, sie zur weiteren Nutzung anbietet und uns damit hilft, einen wesentlichen Schritt in der eigenen beruflichen Entwicklung mit geringerem Risiko und geringerer Anstrengung zu vollziehen, als wenn wir alles alleine entwickeln sollten.

Robert Märki hat keinen Aufwand gescheut, grundlegende Konzepte für einen zeitgemässen Analysisunterricht auszudenken, bekannte Muster anzupassen und zu erproben. Wir sind ihm zu tiefstem Dank verpflichtet, dass er uns einen *knappen und praxiserprobten Text erster Güte* zu einem bescheidenen Preis vorlegt.

H.R. Schneebeli, Wettingen